

Q: 根本身不是对称的。要得到根，需要打破对称性：这句话什么意思

这句话是理解整个“求根公式为什么可能/不可能”的关键。我把它拆开讲。

## 1. 先看“对称”指的是什么

拿二次方程举例：

$$x^2 + px + q = 0$$

两个根是  $x_1, x_2$ 。

所谓**对称**，指的是：

如果你把  $x_1$  和  $x_2$  交换一下，某些表达式不变。

比如：

$$x_1 + x_2$$

交换后变成：

$$x_2 + x_1$$

还是同一个数。所以  $x_1 + x_2$  是**对称的**。

再比如：

$$x_1 x_2$$

交换后变成：

$$x_2 x_1$$

也还是同一个数。所以  $x_1 x_2$  也是**对称的**。

而根据韦达定理：

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

也就是说：

对称的组合可以直接从系数算出来。

这就是关键：系数  $p, q$  本身对“交换两个根”是无感的，它们只记录对称信息。

## 2. 但根本本身不是对称的

现在看单个根，比如  $x_1$ 。

如果你交换  $x_1$  和  $x_2$ ，那么：

$$x_1 \mapsto x_2$$

它变了。

所以：

$x_1$  本身在交换下不是不变的，它不是对称量。

同理  $x_2$  也不是。

也就是说：

- $x_1 + x_2$  是对称量，能从系数直接得到；
- $x_1 x_2$  是对称量，能从系数直接得到；
- 但  $x_1$  和  $x_2$  本身不是对称量，不能直接从系数得到。

## 3. “打破对称性”是什么意思

既然系数只给你对称信息，而你想要的是单个根，那就必须做一件事：

从对称的世界里，造出一个不对称的量。

这个“造出不对称量”的过程，就叫打破对称性。

二次方程里，怎么打破？

我们看这个量：

$$x_1 - x_2$$

交换  $x_1, x_2$  后，它变成：

$$x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2)$$

它变了，变成了自己的相反数。

所以  $x_1 - x_2$  **不是对称的**。它打破了  $x_1$  和  $x_2$  之间的对称。

但是它的平方：

$$(x_1 - x_2)^2$$

交换后变成：

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

又不变了。

所以：

- $x_1 - x_2$ ：不对称，能区分两个根；
- $(x_1 - x_2)^2$ ：对称，可以从系数算出来。

而：

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$$

于是：

$$x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 - 4q}$$

注意这里出现了开方。

开方的作用，正是：

从一个对称量  $(x_1 - x_2)^2$ ，造出一个不对称量  $x_1 - x_2$ 。

这就是“打破对称性”。

---

## 4. 为什么必须打破对称性？

---

因为：

- 系数是对称的；
- 根是不对称的；
- 你想从系数走到根；
- 所以中间必须有一个步骤，把对称信息变成不对称信息。

这个步骤，在公式里就表现为开方。

二次方程：

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

那个  $\pm$  就是在说：

对称量  $p^2 - 4q$  开方后有两个值，分别对应两个根。

---

## 5. 更一般地看

对  $n$  次方程，根是：

$$x_1, \dots, x_n$$

系数只告诉你那些在任意置换下都不变的量，比如：

$$x_1 + \dots + x_n$$

$$\sum_{i < j} x_i x_j$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

这些是对称多项式，能由系数算出。

但单个根  $x_i$  不是对称的。

所以求根公式的任务就是：

从对称的系数出发，通过一系列操作，逐步打破对称，最后得到每个单独的根。

而“开方”就是最基本的打破对称的工具。

## 6. 一句话解释

“根本身不是对称的”，意思是：交换两个根，单个根会变，所以它不能直接从系数得到。

“要得到根，需要打破对称性”，意思是：必须构造一个在交换下会变的量，比如  $x_1 - x_2$ ，再通过开方把它从对称量中解出来。

用二次方程总结：

$x_1 + x_2, x_1 x_2$  对称，可直接由系数得到

$x_1 - x_2$  不对称，能区分两个根

$(x_1 - x_2)^2$  又对称，可由系数得到

$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$  开方，打破对称

于是：

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)}{2}$$

$$x_2 = \frac{(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)}{2}$$

这就是求根公式背后的真正动作：

先找对称量，再开方打破对称，最后组合出根。